УДК 517.9

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ С КОНИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ НА ГРАНИЦЕ

©М. В. Борсук

1. Введение. Обозначения, определения. В данной работе обсуждается проблема разрешимости задачи Дирихле для линейных и квазилинейных уравнений второго порядка общего вида в ограниченной области $G \subset R^n$, граница ∂G которой содержит коническую точку O, в которой поместим начало прямоугольной системы координат. К настоящему времени исследована нормальная разрешимость в весовых соболевских пространствах общих линейных эллиптических задач в негладких областях [1,2] при предположениях достаточной гладкости поверхности $\partial G \setminus O$ и коэффициентов задачи. Мы исследуем разрешимость задачи Дирихле для линейных уравнений в таких функциональных пространствах, в каких она имеет место, при минимальных требованиях на гладкость коэффициентов и правых частей, а также ослабляем требования на гладкость $\partial G \setminus O$. Что же касается квазилинейных уравнений, то мне известно лишь одно исследование [3] (речь идет о недивергентных уравнениях), в котором доказана разрешимость двумерной задачи Дирихле в соболевском пространстве $W_2^{2+\varepsilon}$ при достаточно малом положительном ε. Ниже будут сформулированы новые теоремы существования.

Пользуемся терминологией и обозначениями [4,5]: (r,ω)-сферические координаты точки $x \in R^n$; Ω-область, вырезаемая конусом с вершиной в O на единичной сфере S_0^{n-1} с центром в O, с гладкой границей $\partial\Omega$;

$$G_a^b = \{(r,\omega) | 0 \le a < r < b; \omega \in \Omega\} \cap G \text{ -слой в } R^n,$$

$$\Gamma_a^b = \{(r,\omega) | 0 \le a < r < b; \omega \in \partial\Omega\} \cap \partial G \text{ -боковая поверхность слоя } G_a^b;$$

$G_\varepsilon = G \setminus G_0^\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon = \partial G \setminus \Gamma_0^\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Относительно области G предполагаем: существует положительное число r_0 такое, что $G_0^{r_0} \subset \{x_n > 0\}$-выпуклый конус. Если через $\lambda = \lambda(\Omega)$ обозначить наименьшее положительное собственное число задачи $\Delta_\omega \psi + \lambda(\lambda + n - 2)\psi = 0$, $\psi \in \Omega$; $\psi(\omega) = 0$, $\omega \in \partial\Omega$, где Δ_ω-оператор Лапласа-Бельтрами на единичной сфере, то требование выпуклости конуса равносильно требованию $\lambda > 1$.

Определим функциональное пространство $V_{p,\alpha}^k(G)$ как пространство функций $u(x) \in W^{2,p}(G \setminus O)$, для которых конечна норма

$$\| u \|_{V_{p,\alpha}^k(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{i=0}^{k} r^{p(|i|-k+\alpha/2)} |D^i u|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \ge 1.$$

Введем еще функции: $A(t)$-неотрицательная, определенная при $t \geq 0$ монотонно возрастающая, непрерывная в нуле функция, причем $A(0) = 0$; $d(x) = \operatorname{dist}(x; \partial G \setminus O)$; $\Phi(x)$-любое продолжение внутрь области G граничной функции $\varphi(x)$, так что $\Phi(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial G$.

Исследуем задачи Дирихле:

$$\begin{cases} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x), x \in G \\ u(x) = \varphi(x), x \in \partial G \end{cases} \tag{L}$$

или
$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j}+a(x,u,u_x)=0, x\in G\\ u(x)=\varphi(x), x\in\partial G\end{cases} \tag{QL}$$

2. Задача (L). Предположения:

а) условие равномерной эллиптичности

$$\nu\xi^2\le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\mu\xi^2\ \ \forall x\in\overline{G},\forall\xi\in R^n;\ \ \nu,\mu=\text{const}>0;$$

аа) $a_{ij}(0)=\delta_i^j$-символ Кронекера $(i,j=1,\ldots,n)$;

ааа) $a_{ij}(x)\in C^0(\overline{G})$, $(i,j=1,\ldots,n)$, $a_i(x), a$- измеримые в G функции, причем $a_i(x)\in L_n(G)$, $a(x)\in L_p(G)$, $p>n/2$; для них выполнены неравенства

$$\Big(\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}(x)-a_{ij}(0)|^2\Big)^{1/2}+|x|\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2(x)\Big)^{1/2}+|x|^2|a(x)|\le A(|x|),\ x\in G_0^{r_0}$$

б) $a(x)\le 0\ \ \forall x\in G$;

в) $f(x)\in L_p(G),\ \ \varphi(x)\in V_{p,0}^{2-1/p}(\partial G),\ \ p\ge n$;

г) существуют неотрицательные числа k_1,k_2 и $s>\lambda$ такие, что

$$\|f\|_{V^0_{2,4-n}(G_0^\rho)}+\|\varphi\|_{V^{3/2}_{2,4-n}(\Gamma_0^\rho)}\le k_1\rho^s,\ \ \rho\in(0,r_0);$$

$$\|f\|_{L_p(G^\rho_{\rho/2})}+\|\varphi\|_{V^{2-1/p}_{p,0}(\Gamma^\rho_{\rho/2})}\le k_2\rho^{\lambda-2+n/p},\ \ \rho\in(0,r_0).$$

Теорема 1 . *Пусть* $\Gamma_{r_0}\in C^{1,1}$ *и выполнены предположения а), аа), ааа), б), в), причем либо* $\lambda\ge 2$, $p\ge n$, *либо* $1<\lambda<2$, $n\le p<n/(2-\lambda)$. *Тогда задача (L) имеет единственное решение* $u(x)\in V^2_{p,0}(G)$ *и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{V^2_{p,0}(G)}\le c_1(\|f\|_{L_p(G)}+\|\varphi\|_{V^{2-1/p}_{p,0}(\partial G)}) \tag{2.1}$$

с постоянной $c_1>0$, *не зависящей от* u,f,φ *и определяемой лишь величинами* $\nu,\mu,p,n,\max\limits_{x\in G}A(|x|),\|a\|_{L_p(G)},\|\sum_{i=1}^n|a_i|\|_{L_n(G)}$ *и областью* G.

Теорема 1 доказывается методом продолжения по параметру на основе теоремы Вержбинского-Мазьи [6, теорема 1 и замечание 5] об однозначной разрешимости в рассматриваемом классе задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Оценка (2.1) следует из шаудеровских L_p-оценок внутри области и вблизи гладкого куска границы, принципа максимума А.Д.Александрова (теорема 9.1 [4] и оценки 16 [6]), а также результатов работы [5].

В следующей теореме ослаблены требования на гладкость поверхности Γ_{r_0}, но при этом усилены предположения о гладкости коэффициентов задачи.

Теорема 2 . *Пусть* $1<\lambda<2$, $q\ge n/(2-\lambda)$, $\Gamma_{r_0}\in C^\lambda$. *Пусть выполнены предположения а),аа),б) и ааа),в),г) при* $p=q$. *Пусть, кроме того,* $a_{ij}(x)$ $(i,j=1,\ldots,n)$ *непрерывны по Дини в любой точке* $y\in\partial G$, *то есть*

$$\Big(\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)|^2\Big)^{1/2}\le A(|x-y|)\ \forall x\in\overline{G},\ \forall y\in\partial G,$$

причем $\int\limits_0 \frac{A(t)}{t}dt < \infty$. *Пусть еще существует неотрицательное число* k_3 *такое, что выполнено неравенство*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x))^{1/2} + |a(x)| + |f(x)| + |\Phi_{x,x}(x)| \le k_3 d^{\lambda-2}(x), \quad x \in G_\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0.$$

Тогда задача (L) *имеет единственное решение* $u(x) \in W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(G) \cap C^\lambda(\overline{G})$ *и для него справедлива оценка*

$$|u|_{\lambda,\overline{G}} \le K \tag{2.2}$$

с положительной постоянной K, *не зависящей от* $u(x)$ *и определяемой лишь величинами* $n, \nu, \mu, q, \lambda, s, k_1, k_2, k_3, \max\limits_{x\in G} A(|x|)$, $\int\limits_0^{r_0} \frac{A(r)}{r}dr$, $\| f \|_{L_q(G)}$, $\| \varphi \|_{V^{2-1/q}_{q,0}(\partial G)}$ *и областью* G.

Утверждение теоремы 2 следует из теоремы 9.30 [4] об однозначной разрешимости задачи (L) в пространстве $C^0(\overline{G}) \cap W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(G)$. Принадлежность этого решения классу $C^\lambda(\overline{G})$ и оценка (2.2) следуют из:

–теоремы вложения Соболева - Кондрашова, обеспечивающей требуемую гладкость решения внутри области G;

–теоремы 3 [5] о гладкости решения вблизи конической точки;

–теоремы 3.1 [7] о гладкости решения вблизи границы класса C^λ.

Наконец отметим, что в [5,10] приведены примеры, показывающие, что условие Дини на функцию $A(t)$ в условии ааа), а также требование $s > \lambda$ в предположении г) являются существенными для справедливости утверждений теоремы 2, - в противном случае показатель λ должен быть уменьшен на произвольное положительное ε. Этот показатель нельзя и увелицхить, как показывают частные решения уравнения Лапласа в области с угловой или конической точкой. В этом смысле показатель λ в теореме 2 является неулучшаемым.

3. Задача (QL). Определим множество $\mathfrak{M} \equiv \{(x,u,z) | x \in G, \ u \in R, \ z \in R^n\}$. Предположения:

α) условие равномерной эллиптичности: существуют положительные постоянные μ, ν, не зависящие от u, z, такие, что для любых $(x,u,z) \in \mathfrak{M}$, $\forall \xi \in R^n$ выполнено неравенство

$$\nu\xi^2 \le a_{ij}(x,u,z)\xi_i\xi_j \le \mu\xi^2;$$

β) функция $a(x,u,z)$ удовлетворяет условию Каратеодори и существует число $\beta > -1$, неотрицательные постоянные μ_1, k_1 и функции $b(x)$, $f(x) \in L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{G} \setminus O)$, $q \ge n$, не зависящие от u, z, такие что для $\forall (x,u,z) \in \mathfrak{M}$

$$|a(x,u,z)| \le \mu_1 |z|^2 + b(x)|z| + f(x),$$

$$b(x) + f(x) \le k_1 |x|^\beta, \quad x \in G_0^{r_0};$$

$\alpha\alpha$) функции $a_{ij}(x,u,z)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ на множестве $\mathfrak{M}$ имеют обобщенные производные первого порядка по всем своим аргументам и существуют неотрицательные постоянные μ_0, μ_2, k_2 и функция $g(x) \in L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{G} \setminus O)$, $q > n$, не зависящие от u, z, такие что

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \left| \frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial z_k} - \frac{\partial a_{ik}(x,u,z)}{\partial z_j} \right| \le \mu_0(1+|z|^2)^{-1/2};$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}[\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial u}z_k z_k - \frac{\partial a_{kj}(x,u,z)}{\partial u}z_k z_i + \frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial x_k}z_k - \frac{\partial a_{kj}(x,u,z)}{\partial x_k}z_i]|$$

$$\leq (1+|z|^2)^{1/2}(\mu_2|z|+g(x)),$$

$$||g(x)||_{L_q(G^{\rho}_{\rho/2})} \leq k_2\rho^{n/q-1+\gamma},\ 0<\rho<r_0,$$

$\gamma \in (0;\min(\gamma_0,\beta+1)]$, здесь γ_0-положительное число, определяемое лишь постоянными эллиптичности ν,μ и областью G на основании леммы о барьерной функции [11];

$\alpha\alpha\alpha$) существуют неотрицательные числа μ_3 и функция $h(x)\in L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{G}\setminus O)$, не зависящие от u,z, такие что на множестве $\mathfrak{M}$ выполнено неравенство $|\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial z_k}|\leq \mu_3$,

$$|\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial u};\ \frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial x_k}|\leq h(x);\ k,i,j=1,\ldots,n;\ q>n$$

(α_0) $a_{ij}(0,0,0)=\delta_i^j$; $i,j=1,\ldots,n$ - символ Кронекера.

Задачу (QL) включим в однопараметрическое семейство задач

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j}+ta(x,u,u_x)=0, x\in G\\ u(x)=t\varphi(x),\ x\in\partial G\ \forall t\in[0,1]\end{cases} \qquad (QL_t)$$

и будем предполагать выполненным условие

(γ) для всевозможных решений $u_t(x)\in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\overline{G}\setminus O)\cap C^0(G)$, $p\geq n$, задачи (QL_t) известна величина

$$M_0=\sup_{x\in G}|u_t(x)|\ \ \forall t\in[0,1].$$

Теорема 3 . *Пусть* $\Gamma_{r_0}\in W^{2,p}$, $\varphi(x)\in V^{2-1/p}_{p,0}(\partial G)$, $p>n$ *и выполнены предположения:*

i): α), β), γ), $\alpha\alpha$) при $q=p$ (они гарантируют существование величины $M_1=\sup_{x\in G}|\nabla u_t(x)|\ \forall t\in[0,1]$);

ii): α_0) и $\alpha\alpha\alpha$) при $q=p$ с M_1, определяемой в i).

Тогда, если либо $\lambda\geq 2$, либо $1<\lambda<2$, $n<p<n/(2-\lambda)$, то задача (QL_t) имеет при любом $t\in[0,1]$ по крайней мере одно решение $u_t(x)\in V^2_{p,0}(G)$.

Теорема 4 . *Пусть заданы числа $\lambda\in(1;2)$, $p\in(n,\frac{n}{2-\lambda})$, $\gamma\in(0,\lambda-1)$, $\beta>\lambda-2$, $q\geq n/(2-\lambda)$. Пусть $\Gamma_{r_0}\in W^{2,p}$, $\varphi(x)\in V^{3/2}_{2,4-n}(\partial G)\cap V^{2-1/q}_{q,0}(\partial G)$ и выполнены предположения α), β), $\alpha\alpha$), $\alpha\alpha\alpha$), α_0), γ); пусть, кроме того, существуют неотрицательные числа k_3,k_4,k_5 и $s>\lambda$ такие, что*

$$b(x)+f(x)+|\Phi_{xx}(x)|\leq k_3 d^{\lambda-2}(x),\ x\in G_\varepsilon\ \forall\varepsilon>0;$$

$$||\varphi||_{V^{3/2}_{2,4-n}(\Gamma^{\rho}_0)}\leq k_4\rho^s;\ \ ||\varphi||_{V^{2-1/q}_{q,0}(\Gamma^{\rho}_{\rho/2})}\leq k_5\rho^{\lambda-2+n/q}\ \ \rho\in(0,r_0).$$

Тогда задача (QL_t) имеет при любом $t\in[0,1]$ по крайней мере одно решение $u_t(x)\in W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(G)\cap V^2_{p,0}(G)\cap C^\lambda(\overline{G})$.

Доказательство теорем 3,4 основано на использовании теоремы Лерэ-Шаудера о неподвижной точке (теорема 11.3 [4]); теорем 1,2 об однозначной разрешимости задачи (L), а также локальных априорных оценок нормы $|u_t|_{1+\gamma}$:

–в окрестности конической точки, устанавливаемой нами;

вблизи гладкого куска границы, доказанных в [8,9].

Основным при выводе необходимых априорных оценок в окрестности конической точки является следующее

Утверждение. (см. также [10,11]). Пусть γ_0-число, определяемое леммой о барьерной функции [11]. Пусть $q \geq n$ и $u(x) \in C^0(\overline{G}) \cap W^{2,q}_{loc}(\overline{G} \setminus O)$-решение задачи (QL) с известной величиной M_0. Пусть выполнены предположения α), β). Тогда существуют положительные числа $d \leq r_0$ и c_0, не зависящие от u и определяемые лишь ν, μ, k_1, β, n, γ_0, r_0, M_0, μ_1 и областью G такие, что для любого $\gamma \in (0, \min(\gamma_0, \beta+1)]$ справедлива оценка

$$|u(x)| \leq c_0|x|^{1+\gamma}, \;\; x \in \overline{G}_0^d. \tag{3.1}$$

Если, кроме того, выполнено еще предположение α_0) и $q > n$, то существует положительная постоянная c_1, не зависящая от u и определяемая лишь величинами $\nu, \mu, \mu_0, \mu_1, \mu_2, n, q, \beta, \gamma, M_0, k_1, k_2, r_0$ и областью G такая, что справедлива оценка

$$|\nabla u(x)| \leq c_1|x|^{\gamma}, \;\; x \in \overline{G}_0^d. \tag{3.2}$$

Замечание. В силу непрерывности старших коэффициентов в точке (0,0,0) и оценок (3.1), (3.2) условие α_0) не является ограничительным. Действительно, так как уравнение задачи (QL) равномерно эллиптическое, то существует ортогональное преобразование координат, переводящее уравнение с замороженными старшими коэффициентами в точке (0,0,0) к каноническому виду. Здесь уместно также заметить, что предположения о $\varphi(x)$ и $p \geq n$ обеспечивают равенства $\varphi(0) = \Phi_{x_i}(0) = 0$ для любых $i = 1, \dots, n$.

1. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* , Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук. 1983. – **38**, – *N 2*. – С. 3–76.
2. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* , Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей // – М. : Наука, – 1991. – 336 с.
3. *Данилюк И.И.* , Задача Дирихле для двумерного квазилинейного дифференциального уравнения эллиптического типа // Докл. АН УССР. – 1987. – А. *N 12*. С. 3–7.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* , Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка // М. : Наука, 1989. – 463 с.
5. *Борсук М.В.* , Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы // Матем. сборник. – 1991. – **182**. – *N 10*. – С. 1446–1462.
6. *Верждбинский Г.М., Мазья В.Г.* , О замыкании в L_p оператора задачи Дирихле в области с коническими точками // Известия вузов. Математика. – 1971. – *N 6*. – С. 8–19.
7. *Widman K.-O.*, Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations // Math. scand. – 1967. – **21**, – N 2. – P. 17–37.
8. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* , Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**. – *N 5*. – С. 59–83.
9. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* , Оценки на границе области первых производных функций, удовлетворяющих эллиптическому или параболическому неравенству // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1988. – **179**. – С. 102–125.
10. *Борсук М.В.* , Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи угловой точки // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**. – *N 6*. – С. 85–107.
11. *Борсук М.В.* , Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи конической точки // Доклады АН Украины. – 1993. – *N 1*. – С. 12–15.